Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.,
Bd. 3, S. 157—170 (1957)

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

В. А. Успенский (Москва)

§ 1. Некоторые основные понятия

Замечания, составляющие содержание настоящей статьи, возникли у автора в связи с чтением работ Поста [2] и Деккера [6] по теории перечислимых множеств.

Понятие перечислимого, или порождаемого, множества понимается здесь как интуитивное понятие (аналогичное, например, понятию вычислимой функции). Перечислимое множество (у Поста [2] — „generated set") есть множество, для которого существует эффективный процесс, порождающий в том или ином порядке элементы этого множества. Можно рассматривать перечислимые множества натуральных чисел, пар натуральных чисел и, вообще, кортежей. (Кортежем, как известно, называется конечный упорядоченный набор

$$(m_1, m_2, \ldots, m_i)$$

натуральных чисел; число i членов этого набора называется рангом, или длиной, кортежа.)

Другим важным понятием является понятие разрешимого множества. Разрешимое множество кортежей можно определить как такое перечислимое множество, дополнение к которому (до множества всех кортежей) также перечислимо.

Понятие перечислимого множества можно свести к понятию вычислимой функции посредством следующих определений:

1) Множество R порождается функцией f, если R есть множество значений f.

2) Множество называется перечислимым, если оно порождается вычислимой функцией, определенной на каком-либо множестве натуральных чисел.

Чтобы уточнить понятие перечислимого множества кортежей надлежит, поэтому, уточнить понятие вычислимой функции, значения которой суть кортежи, а аргументы — натуральные числа. Такое уточнение можно осуществить при помощи понятия частично-рекурсивной функции [4]. Назовем функцию f, определенную на каком-либо множестве натуральных чисел и принимающую в качестве значений кортежи, вычислимой, если существуют две частично-рекурсивные функции v (от двух аргументов) и ω (от одного аргумента), обладающие следующими свойствами:

1°. Значение $\omega(n)$ определено тогда и только тогда, когда определено значение $f(n)$; в этом случае $\omega(n)$ есть длина кортежа $f(n)$.

2°. Значение $v(n, h)$ определено тогда и только тогда, когда определено значение $f(n)$; в этом случае, если

$$f(n) = (m_2, \ldots m_i) \quad \text{и} \quad 1 \leqslant h \leqslant i, \quad \text{то}$$
$$v(n, h) = m_h.$$

Поскольку множества натуральных чисел (такие множества мы будем называть *линейными*) и множества пар натуральных чисел (такие множества мы будем называть *плоскими*) являются лишь специальными случаями множеств кортежей, то, в частности, получают уточнения и понятия линейного перечислимого множества и плоского перечислимого множества.

Для дальнейшего нам понадобится следующий хорошо известный в теории вычислимых функций и перечислимых множеств факт:

если перечислимое множество непусто, то существует порождающая его вычислимая функция, определенная на всем натуральном ряду.

§ 2. Гёделевская нумерация

Всякая функция α, осуществляющая отображение какого-либо линейного множества E на множество M, называется *нумерацией* множества M; если $\alpha(e) = m$, то число e называется *номером* элемента m, так что E есть *множество номеров* данной нумерации.

В теории рекурсивных функций большое значение имеет тот случай, когда M есть система $\mathfrak{U}^{(1)}$ всех частично-рекурсивных функций одного аргумента. Широко известна нумерация этой системы, принадлежащая Клини [4] и называемая *гёделевской* нумерацией. Если поставить в соответствие числу e перечислимое множество, порождаемое частично-рекурсивной функцией с гёделевским номером e, то получим *гёделевскую* нумерацию системы $\mathfrak{A}^{(1)}$ всех перечислимых множеств натуральных чисел [5].

Пусть элементы множества M суть функции, аргументы и значения которых являются натуральными числа. По каждой нумерации множества M можно построить следующую функцию F от двух аргументов, называемую *универсальной* для данной нумерации: функция F определена для пары чисел (e, x) в том и только в том случае, если e ехть номер (в рассматриваемой нумерации) некоторой функции $\varphi_e \in M$ и φ_e определена для аргумента x; в этом случае

$$F(e, x) = \varphi_e(x).$$

Нумерация называется *вычислимой*, если ее универсальная функция вычислима и перечислимо множество ее номеров.

Пусть, далее, элементы множества M суть линейные множества. По каждой нумерации множества M можно построить следующее плоское

множество T, называемое *универсальным* для рассматриваемой нумерации: множество состоит из всех числовых пар (e, x), для которых e есть номер некоторого множества $Q_e \in M$ и $x \in Q_e$. Нумерация называется *вычислимой*, если ее универсальное множество перечислимо, и перечислимо множество ее номеров [8].

Примечание 1. *Графиком* функции f называется множество всех таких пар (x, y), для которых $f(x) = y$. Известно [4], что функция тогда и только тогда вычислима, когда ее график есть перечислимое множество. Если отождествить каждую функцию с ее графиком, то понятие вычислимой нумерации системы функций окажется частным случаем понятия вычислимой нумерации системы множеств.

Хорошо известно, что гёделевская нумерация системы $\mathfrak{U}^{(1)}$ и гёделевская нумерация системы $\mathfrak{A}^{(1)}$ суть вычислимые нумерации.

(Примечание 2. Другое важное свойство, которым обладают гёделевские нумерации, состоит в том, что они являются накрывающими [8]. Наличие этих двух свойств и обусловливает важную роль гёделевских нумераций в теории вычислимых функций и перечислимых множеств. Всюду в дальнейшем гёделевские нумерации употребляются лишь для простоты; во всех последующих рассуждениях гёделевскую нумерацию можно было бы заменить на любую главную нумерацию 1-го рода, т. е. нумерацию, являющуюся одновременно вычислимой и накрывающей.)

В следующих леммах под словом «номер» понимается гёделевский номер (см. примечание 2). Рассматриваемые в этих леммах перечислимые множества являются (без специальных оговорок) линейными множествами.

Лемма 1. Существует такая вычислимая функция ν, что $\nu(q)$ есть номер перечислимого множества $\{q\}$, состоящего из одного единственного элемента q.

Доказательство этой леммы дано в Приложении.

Лемма 2. Существует такая вычислимая функция $\varkappa$, что $\varkappa(q)$ есть номер множества $N \setminus \{q\}$ состоящего из всех натуральных чисел, кроме q.

Доказательство этой леммы дано в Приложении.

Лемма 3. Существует вычислимая функция σ, обладающая следующим свойством: если n_1 и n_2 суть номера перечислимых множеств R_1 и R_2, то $\sigma(n_1, n_2)$ есть номер перечислимого множества $R_1 \cup R_2$.

Доказательство этой леммы дано в Приложении.

Лемма 4. Существует вычислимая функция π, обладающая следующим свойством: если n_1 и n_2 суть номера перечислимых множеств R_1 и R_2, то $\pi(n_1, n_2)$ есть номер перечислимого множества $R_1 \cap R_2$.

Доказательство этой леммы дано в Приложении.

Лемма 5. Существует вычислимая функция ν_1, обладающая следующим свойством: если n есть номер перечислимого множества R, то $\nu_1(n, q)$ есть номер перечислимого множества $R \cup \{q\}$.

Доказательство этой леммы получается применением лемм 1 и 3:

$$\nu_1(n, q) = \sigma(n, \nu(q)).$$

Лемма 6. Существует вычислимая функция $\varkappa_1$, обладающая следующим свойством: если n есть номер перечислимого множества R, то $\varkappa_1(n, q)$ есть номер перечислимого множества $R \setminus \{q\}$.

Доказательство: $\varkappa_1(n, q) = \pi(n, \varkappa(q))$, где π и $\varkappa$ — функции из лемм 2 и 4.

§ 3. Нумерации систем бесконечных линейных множеств

Известно [1, 3], что множество всех гёделевских номеров всех обще-рекурсивных функций от одного аргумента не является перечислимым. Более того, известно [4], что система всех обще-рекурсивных функций от одного аргумента вообще не допускает вычислимой нумерации.

Аналогичные вопросы можно поставить для системы всех бесконечных линейных перечислимых множеств. Согласно Райсу [5], множество всех гёделевских номеров всех бесконечных перечислимых множеств неперечислимо. Покажем, что справедливо и более сильное утверждение:

Теорема 1. Система всех бесконечных линейных перечислимых множеств не допускает вычислимой нумерации.

(Этот результат, полученный автором еще в 1951 г., был сформулирован в заметке [8].)

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M}$ систему всех бесконечных линейных перечислимых множеств, и пусть $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$, причем $\mathfrak{M}_1$ обладает вычислимой нумерацией. Достаточно доказать, что $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}$.

Фиксируем какую-либо вычислимую нумерацию системы $\mathfrak{M}_1$ и обозначим через E множество ее номеров, а через G — ее универсальное множество. По определению вычислимой нумерации, E и G перечислимы. Поскольку E и G не пусты, то (§ 1) существуют такие вычислимые функции θ и f, определенные на всем натуральном ряду, что множество значений θ есть E, а множество значений f есть G.

Построим теперь индуктивно следующие вычислимые функции φ и ψ.

а) $\varphi(0)$ есть произвольное число y, такое что

$$(\theta(0), y) \in G.$$

б) Пусть уже построено значение $\varphi(s)$, где $s \geqslant 0$. Тогда $\psi(s)$ определяем так. Образуем числовые пары $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, и т. д. (вспомним, что все значения f суть числовые пары), пока не получим такую пару $(\theta(s), y)$, у которой $y > \varphi(s)$. Тогда полагаем $\psi(s) = y$. [Такая пара $(\theta(s), y)$ обязательно найдется. Действительно, поскольку $\theta(s) \in E$, то $\theta(s)$ есть номер некоторого множества $P \in \mathfrak{M}_1$. Поскольку P бесконечно, то в нем найдется элемент $y > \varphi(s)$. Но так как $y \in P$, то $(\theta(s), y) \in G$ и, следовательно, пара $(\theta(s), y)$ встретится среди пар $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ...].

в) Пусть уже построено значение $\psi(s)$, где $s \geqslant 0$. Тогда $\varphi(s+1)$ определяем так. Образуем пары $f(0)$, $f(1)$, $f(2), \ldots$, пока не получим пару $(\theta(s+1), y)$, у которой $y > \psi(s)$. Тогда полагаем $\varphi(s+1) = y$. [Такая пара найдется по причинам, указанным в пункте б).]

Обозначим через K_φ и K_ψ множества значений функций φ и ψ. Очевидно

$$\varphi(0) < \psi(0) < \varphi(1) < \psi(1) < \varphi(2) < \psi(2) < \ldots$$

Поэтому

(i) $K_\varphi \in \mathfrak{M}$, $K_\psi \in \mathfrak{M}$;

(ii) множества K_φ и K_ψ не пересекаются.

В то же время, если $M \in \mathfrak{M}_1$ и M имеет номер $e = \theta(s)$, то пересечение $K_\varphi \cap M$ содержит число $\varphi(s)$, а пересечение $K_\psi \cap M$ содержит число $\psi(s)$. Поэтому

(iii) каждое из множеств K_φ и K_ψ пересекается со всеми множествами из $\mathfrak{M}_1$.

Из (i), (ii), (iii) следует, что $K_\varphi \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1$ и $K_\psi \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1$. Тем самым доказано, что $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}$, что и требовалось доказать.

Примечание. Поскольку K_φ и K_ψ являются множествами значений монотонно возрастающих функций, определенных на натуральном ряду, то по одной теореме Поста [2] они являются разрешимыми. Поэтому, если в доказательстве теоремы 1 под $\mathfrak{M}$ понимать систему всех бесконечных разрешимых линейных множеств, то получим следующий результат:

Теорема 1а. Система всех бесконечных разрешимых линейных множеств не допускает вычислимой нумерации.

§ 4. Нижние точки и вопросы униформизации

Проекцией плоского множества G на ось абсцисс называется линейное множество (обозначаемое $\text{Пр}_1 G$), обладающее следующим свойством: $x \in \text{Пр}_1 G$ тогда и только тогда, когда существует такое y, что $(x, y) \in G$. Плоское множество L называется *униформным*, если для каждого x существует не более одного y, такого что $(x, y) \in L$. (Иными словами, униформное множество — это множество, служащее графиком некоторой функции.) Говорят, что плоское множество L *униформизует* плоское множество G, если во-первых, $L \subseteq G$, во-вторых, L униформно и, в-третьих, $\text{Пр}_1 L = \text{Пр}_1 G$. Точка $(x, y) \in G$ называется *нижней*, если для всякого $\bar{x} < x$ точка $(\bar{x}, y)$ не принадлежит к G. Заметим, что любое плоское множество всегда униформизуется множеством своих нижних точек.

В теории вычислимых функций и перечислимых множеств, как и в дескриптивной теории множеств, большое значение имеют так называемые вопросы униформизации. Характер этих вопросов таков: задается плоское множество G некоторого специального типа (например, примитивно-рекурсивное, разрешимое или перечислимое). Спрашивается, можно

ли выделить в G униформизующее подмножество того же типа. Для указанных только что типов множеств этот вопрос, как показал П. С. Новиков, решается утвердительно, причем для примитивно-рекурсивного или разрешимого множества G в качестве униформизующего подмножества можно взять множество нижних точек (эти результаты известны автору из лекций по основаниям математики, читанных П. С. Новиковым в 1952 году в Московском Университете).

В случае перечислимого множества G применяется более сложная конструкция. Сперва строится определенная на натуральном ряду функция f, порождающая G, затем вводится вычислимая функция γ, значение которой для числа n задается так: образуем пары

$$f(0),\ f(1),\ f(2), \ldots,$$

пока не получим пару вида (n, y); тогда полагаем $\gamma(n) = y$ (если такой пары не встретится, то значение $\gamma(n)$ не определено). Легко обнаружить, что график функции γ и есть искомое униформизующее перечислимое подмножество множества G.

Спрашивается, нельзя ли все-таки и в случае перечислимого множества G в качестве униформизующего перечислимого подмножества брать множество нижних точек. Следующая теорема показывает, что, вообще говоря, этого делать нельзя.

Теорема 2. Существует плоское перечислимое множество, множество нижних точек которого не перечислимо.

Доказательство. Рассмотрим гёделевскую нумерацию системы всех линейных перечислимых множеств и соответствующее универсальное множество G. Покажем, что множество L нижних точек множества G не перечислимо. Предположим противное, т. е. что L перечислимо. Тогда (см. примечание 1 в § 2) L есть график некоторой вычислимой функции ζ. Очевидно, если k есть гёделевский номер непустого перечислимого множества R, то $\zeta(k)$ есть наименьший элемент из R. Поэтому $\varkappa_1(k, \zeta(k))$, где $\varkappa_1$ — функция из леммы 6 § 2, есть гёделевский номер множества, получающегося удалением из R его наименьшего элемента.

Положим

$$\tau(k, 0) = k,$$

$$\tau(k, i+1) = \varkappa_1(\tau(k, i),\ \zeta(\tau(k, i))).$$

Очевидно, $\tau(k, i)$ есть гёделевский номер множества, получающегося из перечислимого множества R с гёделевским номером k удалением первых (по величине) i элементов. Положим, далее,

$$\varrho(k, i) = \zeta(\tau(k, i)).$$

Если k есть гёделевский номер бесконечного множества R, то $\varrho(k, i)$ есть i-тый по порядку элемент множества R. Однако, известно [2], что,

если R не есть разрешимое множество, то не существует вычислимой функции, пересчитывающей его элементы в порядке возрастания. Полученное противоречие и доказывает теорему.

§ 5. Дихотомическая классификация бесконечных множеств

Бесконечные множества натуральных чисел возможно классифицировать по свойствам систем их перечислимых подмножеств. Такая классификация была начата Постом [2] и продолжена Деккером [6]. Отправляясь от идей Поста и Деккера, можно предложить следующую дихотомическую классификацию.

Прежде всего, рассматриваемое бесконечное множество M может быть перечислимым; отнесем тогда M к классу (α). В противном случае отнесем M к классу (β).

Множества класса (β) разделим следующим образом: отнесем M к классу $(\beta\,\alpha)$, если $M \in (\beta)$ и M не содержит подмножества из класса (α), т. е. бесконечного перечислимого подмножества; все остальные множества из (β) отнесем к классу $(\beta\,\beta)$, так что $(\beta\beta) = (\beta)\setminus(\beta\alpha)$.

Если M принадлежит к классу $(\beta\beta)$ и, следовательно, содержит бесконечное перечислимое подмножество, то могут быть два случая: 1°. Множество M содержит бесконечное перечислимое подмножество R, являющееся *максимальным* в том смысле, что разность $M\setminus R$ [которая непуста, ибо $M \in (\beta)$] уже не содержит бесконечного перечислимого подмножества. [Очевидно этот случай эквивалентен тому, что

$$M = M_1 \cup M_2, \quad \text{где} \quad M_1 \in (\alpha),\ M_2 \in (\beta\alpha)].$$

2°. Множество M не содержит бесконечного перечислимого подмножества, максимального в указанном только что смысле. В первом случае отнесем множество M из $(\beta\beta)$ к классу $(\beta\beta\alpha)$, во втором — к классу $(\beta\beta\beta)$.

Рассмотрим несколько подробнее множества класса $(\beta\beta\beta)$. Пусть $M \in (\beta\beta\beta)$. Тогда M обязательно содержит бесконечное перечислимое подмножество [ибо $M \in (\beta\beta)$]. При этом, какое бы такое подмножество $R \subseteqq M$ мы ни взяли, в разности $M\setminus R$ содержится бесконечное перечислимое подмножество (ибо R не может быть максимальным). Возможны два случая. 1°. Существует вычислимая функция g, обладающая следующим свойством: если n есть гёделевский номер бесконечного перечислимого множества $R \subseteqq M$, то $g(n)$ есть гёделевский номер некоторого бесконечного перечислимого множества $Q \subseteqq M\setminus R$. 2°. Вычислимой функции g обладающей указанным свойством, не существует. В первом случае отнесем M к классу $(\beta\beta\beta\alpha)$, во втором — к классу $(\beta\beta\beta\beta)$.

Множества класса $(\beta\alpha)$ Деккер назвал иммунными (immune). Он же ввел понятие производящего, или продуктивного (productive), множества. Функция p называется производящей для множества M, коль скоро она

обладает следующим свойством: если n есть гёделевский номер перечислимого множества $P \subsetneqq M$, то число $p(n)$ принадлежит разности $M \setminus P$. Множество M называется производящим, если оно обладает вычислимой производящей функцией. Справедливо следующее

Утверждение. Класс производящих множеств совпадает с классом $(\beta\beta\beta\alpha)$.

Доказательство этого утверждения дано в Приложении.

Множества, не являющиеся ни перечислимыми, ни иммунными, ни производящими, Деккер назвал медиальными (medial); класс медиальных множеств есть, таким образом, соединение классов $(\beta\beta\alpha)$ и $(\beta\beta\beta\beta)$.

Встает вопрос о существовании перечислимых множеств дополнения к которым (до натурального ряда) принадлежат указанным выше классам.

Примером перечислимого множества с дополнением из класса (α) может служить пустое множество.

Перечислимые множества, дополнения к которым принадлежат к классу $(\beta\alpha)$, т. е. перечислимые множества, дополнительные к иммунным, Пост назвал простыми (simple). Он же [2] построил пример простого множества.

Перечислимые множества, дополнения к которым принадлежат классу $(\beta\beta\beta\alpha)$, т. е. перечислимые множества, дополнительные к производящим, Пост назвал креативными, или творческими (creative). Он же [2] построил пример такого множества.

Перечислимые множества, дополнительные к множествам классов $(\beta\beta\alpha)$ и $(\beta\beta\beta\beta)$ Деккер назвал мезоическими (mesoic). Он же [6] построил пример перечислимого множества, дополнение к которому принадлежит классу $(\beta\beta\alpha)$. В качестве такого множества M он взял множество значений функции $2\,z(n)$, где $z(n)$ — вычислимая функция, порождающая простое множество. В этом случае максимальным бесконечным перечислимым подмножеством дополнения к M является, например, множество всех нечетных чисел.

Теорема 3. Существует перечислимое множество, дополнение к которому принадлежит классу $(\beta\beta\beta\beta)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное простое множество S и дополнение к нему $\overline{S}$. Рассмотрим плоское множество G всех пар вида (x, y), где $x \in S$. Рассмотрим одновременно дополнительное плоское множество $\overline{G}$ всех пар вида (x, y), где $x \in \overline{S}$. Существует вычислимая функция f, определенная на натуральном ряду и порождающая множество N^2 всех числовых пар. Пусть G^* и $\overline{G}^*$ суть полные прообразы множеств G и $\overline{G}$ при отображении, осуществляемом функцией f. Поскольку G^*, как полный прообраз перечислимого множества, есть перечислимое множество, то для доказательства теоремы достаточно обнаружить, что $\overline{G}^* \in (\beta\beta\beta\beta)$. Докажем это.

Во-первых, множество $\bar{G}^*$ не перечислимо (иначе $\bar{G}$ и, следовательно, $\bar{S}$ было бы перечислимо) и бесконечно, (как полный прообраз бесконечного множества). Следовательно $\bar{G}^* \in (\beta)$.

Во-вторых, $\bar{G}^*$ содержит бесконечное перечислимое множество (полный прообраз множества пар (x_0, y), где x_0 — какая-либо фиксированная точка из $\bar{S}$). Следовательно, $\bar{G}^* \in (\beta\beta)$.

В-третьих, $\bar{G}^*$ не содержит максимального бесконечного перечислимого подмножества [и, следовательно, $\bar{G}^* \in (\beta\beta\beta)$]. Действительно, предположим, что $R \subseteqq \bar{G}^*$ — такое подмножество. Очевидно, что

$$\text{Пр}_1 f(R) \subseteqq \bar{S}.$$

Поскольку множество $\text{Пр}_1 f(R)$ перечислимо, то $\bar{S} \setminus \text{Пр}_1 f(R)$ непусто и содержит точку x_1. Возьмем множество Q, состоящее из всех пар (x_1, y) и положим $Q^* = f^{-1}(Q)$. Очевидно, Q есть бесконечное перечислимое подмножество разности $\bar{G}^* \setminus R$. Итак, $\bar{G}^* \in (\beta\beta\beta)$.

В четвертых, G^* не есть производящее множество [и, следовательно, $\bar{G}^* \in (\beta\beta\beta\beta)$]. Чтобы установить это, достаточно показать, что G^* много-однозначно (many-one) сводится к S (ведь по теореме Поста [2] креативное множество не может много-однозначно сводиться к простому). С этой целью построим такую вычислимую функцию φ, определенную на всем натуральном ряду, что включение $\varphi(n) \in S$ равносильно включению $n \in G^*$. Функция φ строится так: для каждого n значение $\varphi(n)$ есть первый член пары $f(n)$. Итак, окончательно, $\bar{G}^* \in (\beta\beta\beta\beta)$.

§ 6. Свойства прямого пересчета

Прямым пересчетом линейного множества M А. В. Кузнецов предложил называть строго возрастающую функцию φ, область определения которой есть натуральный ряд, а множество значений — множество M (иначе говоря, $\varphi(n)$ есть n-ый элемент множества n в порядке возрастания). Изучение свойств множества по свойствам прямого пересчета начал Пост, показавший [2], что вычислимыми прямыми пересчетами обладают бесконечные разрешимые множества и только они (мы ссылались на этот результат при доказательстве теоремы 2). А. Н. Колмогоров поставил следующий вопрос: каков класс множеств, прямые пересчеты которых не мажорируются вычислимыми функциями, определенными на натуральном ряду.

Назовем множество M *гипериммунным*, если оно бесконечно и не существует перечислимого множества попарно-непересекающихся кортежей, каждый из которых пересекается с M. (При этом мы говорим, что кортеж a пересекается с множеством M или кортежем b, если множество

членов кортежа a пересекается с множеством M или множеством членов кортежа b). Гипериммунное множество является частным случаем иммунного. Перечислимые множества, дополнительные к гипериммунным, Пост [2] назвал гиперпростыми (hypersimple).

Ответ на вопрос А. Н. Колмогорова дает следующая теорема 4 (автору известно, что независимо от него и друг от друга эта теорема была получена А. В. Кузнецовым и Ю. Т. Медведевым; последний опубликовал ее в другой формулировке в статье [7]).

Теорема 4. Прямой пересчет бесконечного множества M тогда и только тогда не мажорируется никакой вычислимой функцией, определенной на натуральном ряду, когда M есть гипериммунное множество.

Доказательство. Обозначим через μ прямой пересчет множества M.

Пусть сперва μ мажорируется некоторой вычислимой функцией ψ, т. е. при любом n имеет место неравенство $\mu(n) \leqslant \psi(n)$. Покажем, что M не гипериммунно. Положим

$$M_m = \{\mu(0),\ \mu(1), \ldots, \mu(m)\},$$
$$\Gamma_m = \{0,1, \ldots, \psi(m)\},$$

так что $\overline{\overline{M}}_m = m + 1$, $\overline{\overline{\Gamma}}_m = \psi(m) + 1$, где через $\overline{\overline{X}}$ обозначена, как обычно, мощность множества X.

Очевидно

$$\Gamma_m \cap M \supseteq M_m.$$

Поэтому, если взять n настолько большим, чтобы было $n > \psi(m)$, то получим

$$\overline{\overline{\Gamma_n \cap M}} \geqslant \overline{\overline{M}}_n > \overline{\overline{\Gamma}}_m,$$

откуда вытекает, что пересечение разности $\Gamma_n \setminus \Gamma_m$ с множеством M непусто, иными словами, непусто пересечение с множеством M кортежа

$$[\psi(m) + 1,\ \psi(m) + 2, \ldots, \psi(n)]$$

(попутно получаем, что $\psi(n) \geqslant \psi(m) + 1$). Полагая $n = \psi(m) + 1$, окончательно получаем, что каждый кортеж

$$C_m = [\psi(m) + 1,\ \psi(m) + 2, \ldots, \psi(\psi(m) + 1)]$$

пересекается с множеством M. Введем в рассмотрение функцию

$$\chi(m) = \psi(m) + 1$$

и заметим, что кортежи C_m и $C_{\chi(m)}$ не пересекаются. Положим, наконец,

$$\zeta(0) = 0,$$
$$\zeta(x + 1) = \chi(\zeta(x))$$

и обозначим через A множество значений функции ζ. Рассмотрим множество всех кортежей C_q, у которых $q \in A$. Это множество перечислимо

и состоит из попарно-непересекающихся кортежей, каждый из которых пересекается с M. Поэтому M не гипериммунно.

Обратно, пусть M не гипериммунно. Тогда существует перечислимое множество R попарно-непересекающихся кортежей, каждый из которых пересекается с M. Пусть f — вычислимая функция, определенная на натуральном ряду и порождающая множество R. Если для каждого n в качестве значения $\psi(n)$ взять наибольший из членов кортежей $f(0), f(1), \ldots, f(n)$, то функция ψ будет мажорировать функцию μ.

Приложение

Доказательство леммы 1. Пусть e — гёделевский номер функции тождества U_1^2 (см. [4], § 44). Положим для каждого q

$$\nu(q) = S_1^1(e, q),$$

где S_1^1 — функция, введенная в § 65 нкиги Клини [4]. Тогда, в силу теоремы XXIII из [4], для всякого x

$$\Phi_1(\nu(q), x) \simeq \Phi_1(S_1^1(e, q), x) \simeq \Phi_2(e, q, x) \simeq U_1^2(q, x) = q.$$

Таким образом, $\nu(q)$ есть гёделевский номер функции, тождественно равной q, т. е. гёделевский номер одноэлементного множества $\{q\}$.

Доказательство леммы 2. Аналогично доказательству предыдущей леммы. Введём функцию $\varphi(x, y)$, положив

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} y, & \text{если } x \neq y \\ x + 1, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Очевидно, при каждом q множество значений функции $\varphi(q, y)$ есть $N \setminus \{q\}$. Пусть e — гёделевский номер функции φ. Положим для каждого q

$$\varkappa(q) = S_1^1(e, q).$$

Тогда

$$\Phi_1(\varkappa(q), y) \simeq \Phi_1(S_1^1(e, q), y) \simeq \Phi_2(e, q, y) \simeq \varphi(q, y).$$

Таким образом, $\varkappa(q)$ есть гёделевский номер функции $\varphi(q, y)$, порождающей множество $N \setminus (q)$, т. е. гёделевский номер самого этого множества.

Доказательство леммы 3. Введем частично-рекурсивную функцию $\varphi(u, v, z)$, задав её равенствами

$$\varphi(u, v, 2y + 1) = \Phi_1(u, y),$$
$$\varphi(u, v, 2y) = \Phi_1(v, y),$$

где Φ_1 — универсальная функция Клини (см. [4], § 65). Пусть e — гёделевский номер функции φ. Положим для всяких n_1 и n_2

$$\sigma(n_1, n_2) = S_1^2(e, n_1, n_2).$$

Покажем, что функция σ удовлетворяет требованиям леммы 3. Пусть n_1 и n_2 суть гёделевские номера перечислимых множеств R_1 и R_2. Это озна-

чает, что R_1 и R_2 порождаются соответственно функциями $\Phi_1(n_1, y)$ и $\Phi_1(n_2, y)$. Имеем

$$\Phi_1(\sigma(n_1, n_2), z) \simeq \Phi_1(S_1^2(e, n_1, n_2), z) \simeq \Phi_3(e, n_1, n_2, z) \simeq \varphi(n_1, n_2, z).$$

Но по построению функции φ, при любых n_1, n_2 порождаемое функцией $\varphi(n_1, n_2, z)$ множество есть сумма множеств, порождённых функциями $\Phi_1(n_1, z)$ и $\Phi_1(n_2, z)$, т. е. множеств R_1 и R_2. Мы получим, таким образом, что $\sigma(n_1, n_2)$ есть гёделевский номер множества $R_1 \cup R_2$.

Доказательство леммы 4. Введём частично-рекурсивную функцию φ посредством схемы

$$\varphi(u, v, z) \cdot \delta(z, \Phi_1(u, x)) \cdot \delta(z, \Phi_1(v, y)) = z \cdot \delta(z, \Phi_1(u, x)) \cdot \delta(z, \Phi_1(v, y)),$$

где $\delta(z, t) = \overline{sg}(|z-t|)$ (см. [4]). Если для данного числа z существуют такие числа x и y, что $\Phi_1(u, x) = z$, $\Phi_1(v, y) = z$, то $\varphi(u, v, z) = z$; в противном случае $\varphi(u, v, z)$ не определена. Следовательно, для каждых чисел n_1 и n_2 функция $\varphi(n_1, n_2, z)$ порождает множество, являющееся пересечением множеств, порождённых функциями $\Phi_1(n_1, x)$ и $\Phi_1(n_2, y)$. Поэтому, если обозначить через e гёделевский номер функции φ и положить для всяких n_1, n_2

$$\pi(n_1, n_2) = S_1^2(e, n_1, n_2),$$

то так построенная функция π будет удовлетворять требованиям леммы (проверяется это совершенно так же, как в доказательстве предыдущей леммы).

Лемма 7. Существует вычислимая функция γ, обладающая следующим свойством: если n есть гёделевский номер непустого линейного перечислимого множества R, то $\gamma(n)$ есть элемент множества R.

Доказательство. Рассмотрим универсальное множество G для гёделевской нумерации линейных перечислимых множеств. Пусть L — перечислимое множество, униформизующее множество G (§ 4). Если рассмотреть L как график некоторой функции γ, то функция γ и будет искомой.

Доказательство утверждения из § 5. Пусть $M \in (\beta\beta\beta\alpha)$. Построим вычислимую производящую функцию p. Поскольку $M \in (\beta\beta)$, то M содержит некоторое бесконечное перечислимое подмножество R_0. По лемме 3 существует вычислимая функция ζ, обладающая следующим свойством: если n — гёделевский номер перечислимого множества P, то $\zeta(n)$ — гёделевский номер перечислимого множества $R = P \cup R_0$. Возьмем вычислимую функцию g, фигурирующую в определении класса $(\beta\beta\beta\alpha)$. Число $g(\zeta(n))$ есть гёделевский номер некоторого бесконечного перечислимого множества $Q \subsetneqq M \setminus R \subsetneqq M \setminus P$. Тогда число $\gamma(g(\zeta(n)))$, где γ — функция из леммы 7, принадлежит разности $M \setminus P$. Положив $p(x) = \gamma(g(\zeta(x)))$, получим требуемую функцию.

Обратно, пусть M — производящее множество и пусть p — его производящая функция. Докажем, что $M \in (\beta\beta\beta\alpha)$. Покажем прежде всего, что для всякого перечислимого множества $R \subseteqq M$ существует некоторое бесконечное перечислимое множество, содержащееся в разности $M \setminus R$. Отсюда сразу будет следовать, что $M \in (\beta\beta\beta)$. Пусть $n_0 = n$ — гёделевский номер множества $R_0 = R$. Пусть $R_1 = R_0 \cup \{p(n_0)\}$, n_1 — гёделевский номер множества R_1 и вообще пусть n_i — гёделевский номер множества R_i, причём $R_{i+1} = R_i \cup \{p(n_i)\}$. Положим

$$Q_n = \{p(n_0),\ p(n_1),\ p(n_2),\ \ldots\}.$$

Очевидно, Q_n бесконечно и $Q_n \subseteqq M \setminus R$. Гёделевский номер n_i задаётся следующей рекурсией:

$$n_0 = n,$$
$$n_{i+1} = \nu_1(n_i,\ p(n_i)),$$

где ν_1 — функция из леммы 5. Поэтому Q_n перечислимо. Итак, $M \in (\beta\beta\beta)$. Чтобы обнаружить, что $M \in (\beta\beta\beta\alpha)$ осталось построить функцию g, фигурирующую в определении класса $(\beta\beta\beta\alpha)$. Если ввести вычислимые функции φ и ψ:

$$\varphi(x, 0) = x,$$
$$\varphi(x, y+1) = \nu_1(\varphi(x, y),\ p(\varphi(x, y))),$$
$$\psi(x, y) = p(\varphi(x, y)),$$

то окажется, что при каждом n множество Q_n порождается функцией $\psi(n, y)$, рассматриваемой как функция от y. В силу теоремы XXIII из книги Клини [4] существует такая вычислимая функция g, что при каждом n число $g(n)$ есть гёделевский номер функции $\psi(n, y)$, т. е. гёделевский номер множества Q_n.

При подготовке настоящей статьи к печати автор получил ряд ценных указаний от А. А. Маркова. В частности, А. А. Маркову принадлежат приведенные выше доказательства лемм 1—4; эти доказательства проще, чем те, которые первоначально предполагались автором. Автор благодарен А. А. Маркову за внимание к его работе.

Литература

[1] S. C. KLEENE, General recursive functions of natural numbers. Math. Ann. **112**, 727 to 742 (1936).
[2] E. L. POST, Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 284—316 (1944).
[3] R. PÉTER, Rekursive Funktionen. Budapest, 1951.
[4] S. C. KLEENE, Introduction to metamathematics. New York—Toronto, 1952.
[5] H. G. RICE, Classes of recursively enumerable sets and their decision problems. Trans. Amer. Math. Soc. **74**, 358—366 (1953).
[6] J. C. E. DEKKER, Two notes on recursively enumerable sets. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 495—501 (1953).
[7] Ю. Т. Медведев, О неизоморфных рекурсивно—перечислимых множествах. Докл. Акад. Наук СССР **102**, 211—214 (1955).
[8] В. А. Успенский, Системы перечислимых множеств и их нумерации. Докл. Акад. Наук СССР **105**, 1155—1158 (1955).

Resume

Some notes on recursively enumerable sets

V. A. USPENSKIJ (Moscow)

§§ 1 and 2 have preliminary character. The concepts of generated (i. e. recursively enumerable) set and of calculable (in particular, Gödel) numbering are discussed. In § 3 it is proved that there is no calculable numbering for the system of all infinite recursively enumerable sets of natural numbers.

§ 4 contains an example of the «plane» recursively enumerable set whose set of lower points is not recursively enumerable. Post-Dekker classification of infinite sets is considered in § 5. A property typical of the so called hyperimmune sets is analysed in § 6. The proofs of certain statements of this paper are given in the Supplement.

(Eingegangen am 9. Mai 1957)